Concours Centrale - Supélec 1997

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière TSI

Partie I - La fonction F

Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt .$$

I.A - Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, étudier ses variations, et préciser sa limite en $+\infty$. Montrer que $F(0)$ est strictement positif.

I.B -

I.B.1) Montrer que le graphe de F présente un centre de symétrie, que l'on précisera, situé sur l'axe des ordonnées.

I.B.2) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2} dt \leq \frac{F(x)}{x^2} .$$

I.B.3) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que lorsque x tend vers $+\infty$, $F(x)$ est équivalent à

$$\frac{e^{-x^2/2}}{x} .$$

I.C - Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du second ordre que l'on précisera.

I.D - Dans cette question on se propose de calculer $F(0)$.

Soit G définie par

$$G(x) = \frac{1}{F(0)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+t^2)x^2/2}}{1+t^2} dt .$$

I.D.1) Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Calculer $G(0)$ en fonction de $F(0)$, puis $\lim_{x \to +\infty} G(x)$.

I.D.2) Soit $J = [a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ avec $a < b$.

Montrer que G est de classe C^1 sur J et préciser sa dérivée sur J.

En déduire que G est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer que, sur $\mathbb{R}^{+*}$, $G' = F'$.

En déduire que, sur $\mathbb{R}^{+*}$, $G = F$ et déterminer $F(0)$.

Partie II - Étude d'une suite d'équations différentielles

Pour n entier, soit (E_n) l'équation différentielle $y'' + xy' - ny = 0$ où y est fonction de x.

On note S_n l'ensemble des solutions réelles de (E_n) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

II.A - Que sait-on, *a priori*, sur S_n ?

II.B - Soit $y \in S_n$. Soit z définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $z(x) = xy(x) + y'(x)$.

Montrer que $y' \in S_{n-1}$ et $z \in S_{n+1}$.

II.C - Soit $y \in S_0$. On définit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$y_0 = y \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ y_{n+1}(x) = xy_n(x) + y'_n(x) .$$

II.C.1) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $y_n \in S_n$.

II.C.2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y'_{n+1} = (n+1)y_n$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ y_{n+1}(x) = xy_n(x) + ny_{n-1}(x) .$$

Partie III - Étude d'une suite de polynômes

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynômes sur $\mathbb{R}^{+*}$ définies par $P_0(x) = 1$ et, pour $n \geq 0$, $P_{n+1}(x) = xP_n(x) + P'_n(x)$.

III.A - Vérifier que $P_n \in S_n$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P'_{n+1} = (n+1)P_n ,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ P_{n+1}(x) = xP_n(x) + nP_{n-1}(x) .$$

III.B - Montrer que P_n est de degré n et à coefficients positifs.

III.C - Montrer que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on a :

$$P_{2p}(x) \geq \frac{(2p)!}{2^p p!}(1 + px^2)$$

et $P_{2p-1}(x) \geq \frac{(2p)!}{2^p p!} x .$

III.D - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!(n-1)!}$.

III.D.1) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

III.D.2) En déduire le comportement quand n tend vers l'infini de la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n)$.

III.D.3) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

III.D.4) Soit $x>0$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n^2(x)}{n!} = +\infty$.

Partie IV - Étude de S_n

Soit $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par
$R_0 = F$ et, pour $n\geq 0$, $R_{n+1}(x) = xR_n(x) + R'_n(x)$,

où F est la fonction définie au I.

IV.A - Vérifier que $R_n \in S_n$ et que
$\forall n\in\mathbb{N}, R''_{n+1} = (n+1)R_n$,

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}^{+*}, R_{n+1}(x) = xR_n(x) + nR_{n-1}(x)$.

IV.B - Montrer qu'il existe une unique suite de fonctions polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, vérifiant pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$,
$R_n(x) = P_n(x)F(x) + Q_n(x)F'(x)$
$Q_{n+2}(x) = xQ_{n+1}(x) + (n+1)Q_n(x)$.

IV.C - À l'aide de I, prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} R_n(x) = 0$.

IV.D -

IV.D.1) Montrer que (P_n, R_n) est une base de S_n.

IV.D.2) Déterminer les éléments de S_n qui ont une limite nulle en $+\infty$.

IV.E - On pose, pour $x\in\mathbb{R}^{+*}$ et $n\in\mathbb{N}$:

$$T_n(x) = P_n(x)\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{P_n^2(t)}\,dt.$$

IV.E.1) Montrer que T_n est bien défini sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est élément de S_n.

IV.E.2) Montrer que, pour tout x strictement positif,

$$0\leq T_n(x)\leq \frac{F(x)}{P_n(x)}.$$

IV.E.3) En déduire qu'il existe un réel α_n tel que $T_n = \alpha_n R_n$.

IV.F - On pose pour $n\in\mathbb{N}$,
$W_n = P_nR'_n - P'_nR_n$.

IV.F.1) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $W_n = -nW_{n-1}$. En déduire W_n.

IV.F.2) Calculer $P_nT'_n - P'_nT_n$. En déduire α_n.

Partie V - Une jolie formule

V.A -

V.A.1) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, \forall n\in\mathbb{N}, 0\leq |P_n(x)F(x) + Q_n(x)F'(x)| \leq n!\dfrac{F(x)}{P_n(x)}$

V.A.2) En déduire, pour $x>0$ fixé, l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Q_n(x)}{P_n(x)}$.

V.B - On pose pour $x>0$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $1\leq p\leq n$,

$$Z_{p,n}(x) = \cfrac{p}{x+\cfrac{p+1}{x+\cfrac{p+2}{\ddots \cfrac{}{x+\cfrac{n}{x}}}}}.$$

V.B.1) Pour $2\leq p\leq n$ et $x>0$, exprimer $Z_{p-1,n}(x)$ à l'aide de $Z_{p,n}(x)$.

V.B.2) Montrer que pour $1\leq p\leq n$ et $x>0$,

$$\frac{Q_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)} = \frac{Q_p(x) + Z_{p,n}(x)Q_{p-1}(x)}{P_p(x) + Z_{p,n}(x)P_{p-1}(x)}.$$

V.B.3) En déduire pour $x>0$ la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} \cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{2}{x+\cfrac{3}{\ddots \cfrac{}{x+\cfrac{n}{x}}}}}}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail